

"Relación das Matemáticas e a Arte Dixital 3D"

Vázquez López, Luis

Doutor en Informática

Profesor de Secundaria de Matemáticas (Xunta de Galicia)

Profesor titor de Informática (C. A. de Lugo UNED)

e-mail: luisvazquez@edu.xunta.gal

Resumo:

Intentará dar resposta as seguintes preguntas, a nivel de secundaria e bacharelato, para podelo poñer como exemplo no día a día da materia de matemáticas.

¿Matemáticas e Arte?

¿Uso das matemáticas na informática "Dixital"?

¿Por qué son importantes as matemáticas no deseño gráfico?

¿Cómo as matemáticas axudan no proceso de animación?

¿Cómo se usa a xeometría matemática no deseño 3D?

¿O arte Fractal?, ...

Palabras Clave: Matemáticas, Arte Dixital, 3D, Deseño gráfico.

1.- ¿Matemáticas e Arte?

A relación existente entre as matemáticas e o arte e un nexa existente dende fai miles de anos. Exemplo: o **cubismo** (corrente fundamentalmente pictórica baseada no predominio das formas xeométricas, como triángulos, cubos,... busca a pureza xeométrica e matemática das cousas) baseada nos elementos xeométricos ou os **fractais** obxectos matemáticas no arte dixital.

No deseño de monumentos, obras escultóricas, pinturas están presentes as matemáticas a través da xeometría as matemáticas.

Na escola Pitagórica as figuras e os números son a esencia das cousas. Para Pitágoras todo estaba relacionado e rexido polos números: o arte, a arquitectura, o universo.

Exemplo de relación numérica de interese son:

- Relación que existe entre a lonxitude das cordas dunha lira e os acordes da música.
- Na cultura grega e unha ferramenta fundamental.
- As dimensións da Gran Pirámide que a altura dunha cara, esta en sección áurea coa metade do lado base.
- Leonardo da Vinci indica as relacións do número áureo como:
 - o Cociente entre a altura do home e a distancia do ombligo a punta da man.
 - o A distancia dende a cadeira ata o chan e dende ahí a rodilla.
 - o ...
- En obra pictóricas de Dalí "Leda atómica" o "El Cristo de la cruz", rostro de la Gioconda nos encontramos coa proporción divina.
- En épocas mais recentes, século XX o pintor holandés Pieter Mondrian usou a sección áurea en grande parte das súas obras, que tiveron gran influencia na arquitectura, o deseño industrial e nas artes gráficas.

Con respecto o **arte dixital** , xogan un papel moi importante as matemáticas no uso duns elementos máis recentes, **os fractais** . Benoît Mandelbrot no libro "The Fractal Geometry of Nature" aparece o nome de fractal. Xurde pola necesidade de explicar

aqueles fenómenos naturais os que a xeometría de Euclides só podía chegar a aproximarse.

O uso dos fractais co emprego dos computadores, foron aproveitados para a composición de música baseada en series numéricas como a sucesión de Fibonacci.

2.- ¿Uso das matemáticas na informática "Dixital"?

A xeración procedural é unha técnica baseada en fórmulas matemáticas que crea algoritmos recursivos. É un recurso moi utilizado en videoxogos e funciona de forma automática. Por exemplo se queremos crear un bosque de carballos, xerase cada carballo e o seu movemento natural e orgánico. Isto dálle realismo o mapa sen facer unha diminución no rendemento debido a grande cantidade de procesos gráficos que levaría senón se utilizase esta técnica.

O uso das matemáticas serve para o deseño de videoxogos, cine, curtos de animación, programación, arte, fotografía, ...

Exemplo na película de Brave, o equipo de rodaxe e produción viaxou ata Escocia para plasmar a beleza natural do entorno na película de animación. Fixeron fotos dos elementos naturais que logo xeraron fórmulas matemáticas.

Nesta técnica é moi importante a cor e trátase de moitos fotogramas uns detrás de outros, a e a súa vez, están compostos por píxeles. Cada píxel leva a organización de cores primarios (vermello, verde e azul). E en base a isto créanse os demais cores.

Neste punto podemos planear as vantaxes e desvantaxes na utilización da tecnoloxía e software educativo con fins docentes.

Vantaxes:

- Axuda a desenvolver o pensamento formal.
- As gráficas facilitan a integración de diversas imáxenes conceptuais.
- Contribúe a interiorización dos conceptos e procedementos.
- Desenvolve novas estratexias de razoamento.
- Favorecen a investigación e o descubrimento.
- Fortalecen o traballo autónomo do estudante, ...

Desvantaxes:

- Perigo tecnocentrista, centrarse no software en vez de nos conceptos matemáticos.
- Perdida de destrezas matemáticas básicas.

- Confianza cega na máquina, aceptando calquera solución, sen razoar e sen ter en conta o concepto.

- Incapacidade para valorar as dificultades dos problemas, ...

A comprensión sobre a relación bidireccional entre unha ecuación dada no espazo de tres dimensión e a superficie que a representa foi sempre considerado un tema difícil de interpretar por parte do alumnado. A relación entre a mobilidade dos parámetros, das ecuación e a variación das formas que se obteñen, e un elemento de significado importante para a construción do concepto.

3.- ¿Por qué son importantes as matemáticas no deseño gráfico?

Os algoritmos no deseño gráfico por ordenador, empregan moitos conceptos e técnicas matemáticas. Exemplo os temas de xeometría analítica, álgebra lineal, análises vectorial, análises tensorial, números complexos, análises numérico, ...

- *Estrutura de referencia de coordenadas.*

Polo xeral, os paquetes de gráficas requiren que se especifiquen os parámetros de coordenadas con respecto de estruturas de referencia cartesiana. Pero en moitas aplicacións son útiles sistemas de coordenadas no cartesianas. Pódese utilizar simetrías esféricas, cilíndricas ou de outro tipo para simplificar as expresións que implican descrições ou manipulación de obxectos.

Exemplo:

- *Coordenadas cartesianas bidimensionais (x,y) , coordenadas polares no plano XY $(r, \text{ángulo})$.*
- *Coordenadas cartesianas tridimensionais (x, y, z) , coordenadas cilíndricas $(p, \text{ángulo}, z)$*
- *Ángulo sólido (entre dúas liñas que se intersecan, e unha rexión con forma de cono e ápice).*
- *Puntos e vectores.*

Diferenza do concepto de punto e vector.
Saber describir o concepto de vector como un segmento de liña dirixido.
Operación con vectores (suma, resta, multiplicación).
Produto vectorial de dous vectores.
- *Vector base e o tensor métrico.*

Conxunto de vectores independentes en forma lineal.
Espazo vectorial formado polos vectores da base e o conxunto menor de vectores necesario para facer a representación do seguinte vector.
Base ortonormal os vectores nunha base se normalizan de modo que cada vector ten unha magnitude de 1. O conxunto de vectores unitarios coñécese como base normal. Sendo os vectores perpendiculares entre sí.
Tensor métrico son a xeneralización da noción de vector. De maneira específica, un tensor e unha cantidade que ten un número de compoñentes, que depende do rango do tensor e da dimensión do espazo, que cumpre certas propiedades de transformación cando se converte dunha representación de coordenadas a outra.
- *Matrices.*

Unha matriz e unha disposición rectangular de cantidades (números, funcións ou expresións numéricas) que se coñecen como os elementos da matriz.

Operacións con matrices.

- *Multiplicación por un escalar, suma, resta.*
- *Multiplicación de matrices.*
- *Trasposta dunha matriz.*
- *Determinante dunha matriz. (Pódense definir de maneira recursiva).*
- *Inversa dunha matriz, ...*
- *Números complexos.*
Representación no plano complexo.
Conxugado dun número complexo.
Raíz n-ésima dun número complexo.
Emprego dos números complexos en termos de coordenadas polares ($z = r(\cos x + i \sin x)$)
- *Cuaternios (extensión dos números complexos, unha parte real e tres partes imaxinarias).*
A extensión dos números complexos a dimensións mais altas con cuaternios, que son números cunha parte real e tres partes imaxinarias.
- *Representacións non paramétricas.*
Cando expresamos as descrições dun obxecto de maneira directa en termos das coordenadas da estrutura de referencia, dise que a representación é non paramétrica.
- *Métodos numéricos.*
Nos algoritmos para as gráficas por ordenador, soen aparecer conxuntos de ecuacións lineais, ecuacións non lineais, ecuacións integrais e outras formas de funcións. Para conseguir un conxunto discreto de datos, pode ser útil desplegar unha curva continua ou unha función de superficie que se aproxime os puntos do conxunto de datos.
Exemplos de usos:
 - *Solución de conxuntos de ecuacións lineais.*
 - *Avaliación de integrais, ...*
- ...

4.- ¿Formas de describir unha imaxe?

É posible describir unha imaxe de moitas formas. Si supoñemos que temos un dispositivo de rastreo, unha imaxe especificase por completo polo conxunto de intensidades para as posición do píxel no despregue.

Outra forma sería describir a imaxe como un conxunto de obxectos complexos, en posicións de coordenadas específicas no escenario. As formas e as cores dos obxectos se poden describir a nivel interno, con matrices de píxel ou con conxunto de estruturas xeométricas básicas; como segmentos de liñas rectas ou áreas de cor de polígonos.

Entonces, a escena se desprega xa sexa o cargar as matrices de píxel no buffer de estrutura, ou o converter mediante rastrexo as estruturas xeométricas básicas nos patróns de píxel.

Empregaranse diferentes algoritmos para o trazo de liñas. (Exemplo o analizador diferencial dixital (DDA)).

Outro algoritmo moi empregado e o algoritmo de xeración de circunferencias; o algoritmo de xeración de elipses.

5.- ¿Cómo as matemáticas axudan no proceso de animación?

Cos procedementos para despregar primitivos de saída e os seus atributos podemos crear unha variedade de imaxes e gráficas. En moitas aplicación tamén é necesario alterar ou manipular os despregues. Créanse aplicación de deseño e planos de construción o ordenar as orientacións e os tamaños das partes que compoñen a escena. E prodúcese animacións o mover a cámara ou os obxectos da escena o largo das traxectorias da animación. Os cambios de orientación, tamaño e forma realízanse con transformacións xeométricas que alteran as descrições das coordenadas dos obxectos. As transformacións xeométricas básicas son **traslación, rotación e escalación**. Outras transformacións que se aplican con frecuencia nos obxectos inclúen a **reflexión** e o **recorte**.

Transformacións compostas.

Coa representación de matrices, podemos establecer unha matriz para calquera secuencia de transformación como unha matriz de transformación composta o calcular o produto da matriz das transformacións individuais.

6.- ¿Cómo se usa a xeometría matemática no deseño 3D?

Cando modelamos e despregamos unha escena tridimensional, debemos tomar moitas consideracións máis aparte de incluír só valores para a terceira dimensión.

Pódense crear as fronteiras dos obxectos con varias combinacións de superficies planas e curvas e en ocasións, é preciso especificar información acerca dos interiores dos obxectos. Os paquetes de gráficas ofrecen rutinas para despregar compoñentes internos ou vistas de seccións cruzadas de obxectos sólidos. Algunhas transformacións xeométricas se entenden mellor nun espazo tridimensional que en dúas dimensións.

As transformacións en tres dimensións son moito máis complexas porque temos que seleccionar moitos parámetros mais o especificar a maneira en que se debe diagramar unha escena tridimensional nun dispositivo de despregue. A descripción da escena debese procesar a través de transformacións de coordenadas de vista e rutinas de proxección que transforman coordenadas de vista tridimensional a coordenadas de dispositivo bidimensional. Para unha vista seleccionada, débense identificar as partes visibles dunha escena, e necesario aplicar algoritmos de presentación de superficie, si se quere a presentación realista dunha escena.

Representación de Spline.

Na terminoloxía do debuxo mecánico, unha spline e unha banda flexible que se emprega para producir unha curva suave a través dun conxunto de puntos designados. Esta curva en forma matemática e unha función cúbica polinómica cuxa primeira e segunda derivada son continuas a través das distintas seccións das curvas.

No deseño 3D, o termo curva de spline agora se refire a calquera curva composta que se forma con seccións polinómicas que satisfan condicións específicas de continuidade na fronteira das pezas. Unha superficie de spline se pode describir con dous conxuntos de curvas ortogonais de spline.

7.- ¿O arte Fractal?

A xeometría de Euclides intentou regularizar as formas xeométricas, e realizar aproximacións de leis reais, pero non conseguiu explicar todos os fenómenos que ocorren na natureza, debido a que nesta reina o caos.

Podemos atopar fractais nas árbores, nas montañas, nas liñas de costa, na forma das nubes, nas ondas do mar, nun raio, que non poden explicarse coa xeometría euclidiana.

Os fractais nos van a permitir encontrar un orden no caos natural. Son obxectos matemáticos cuia característica principal e a autosimilitude.

Podemos definir **O arte fractal** como o resultado de obter imáxenes por ordenador usando os fractais. As imaxes fractais son a representación dunha fórmula matemática por ordenador (fórmula sinxela e usa un algoritmo de cor).

No deseño dos fractais, consiste que a estrutura orixinal replicase de maneira infinita unha e outra vez, obtendo así unhas imáxenes que parecen ter a simple vista unha gran complexidade. (Exemplo de programas [Fractal Design, Fractint, Sterling, ...])

A beleza que encerran os obxectos matemáticos e indescriptible. O uso e o manexo da cor e dos algoritmos necesarios para a súa creación e algo digno de ver.

(Exemplo: <http://www.aliciadangelica.com.ar/>)

8.- Conclusións:

Sen as matemáticas non sería posible crear, presentar e divulgar o arte dixital 3D. E moitos dos coñecementos abstractos que se ensinan por primeira vez na etapa de secundaria e no bacharelato son a base do arte dixital 3D, e o que permitiu o seu grande avance nestes últimos anos.

Bibliografía e Webgrafía:

- Eric Lengyel, "Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics (third edition)", Ed. Cengage Learning, 2011.
- Michael E. Mortenson, "Mathematics for Computer Graphics Applications (second edition)".Ed. Industrial Press, 1999.
- Hughes John, van Dam Andries, **Computer Graphics:Principles and Practice: Principles and Practices**, 0321399528, 3 Edición, Addison-Wesley Educational Publishers Inc, 2013
- <https://computerhoy.com/reportajes/entretenimiento/usar-matematicas-como-pincel-crear-animaciones-3d-pixar-funciona-generacion-procedural-766941>
- <https://matematica-aplicada.faud.unsj.edu.ar/wp-content/uploads/2018/12/Apunte-Matematica-Aplicada-Unidad-3.pdf>