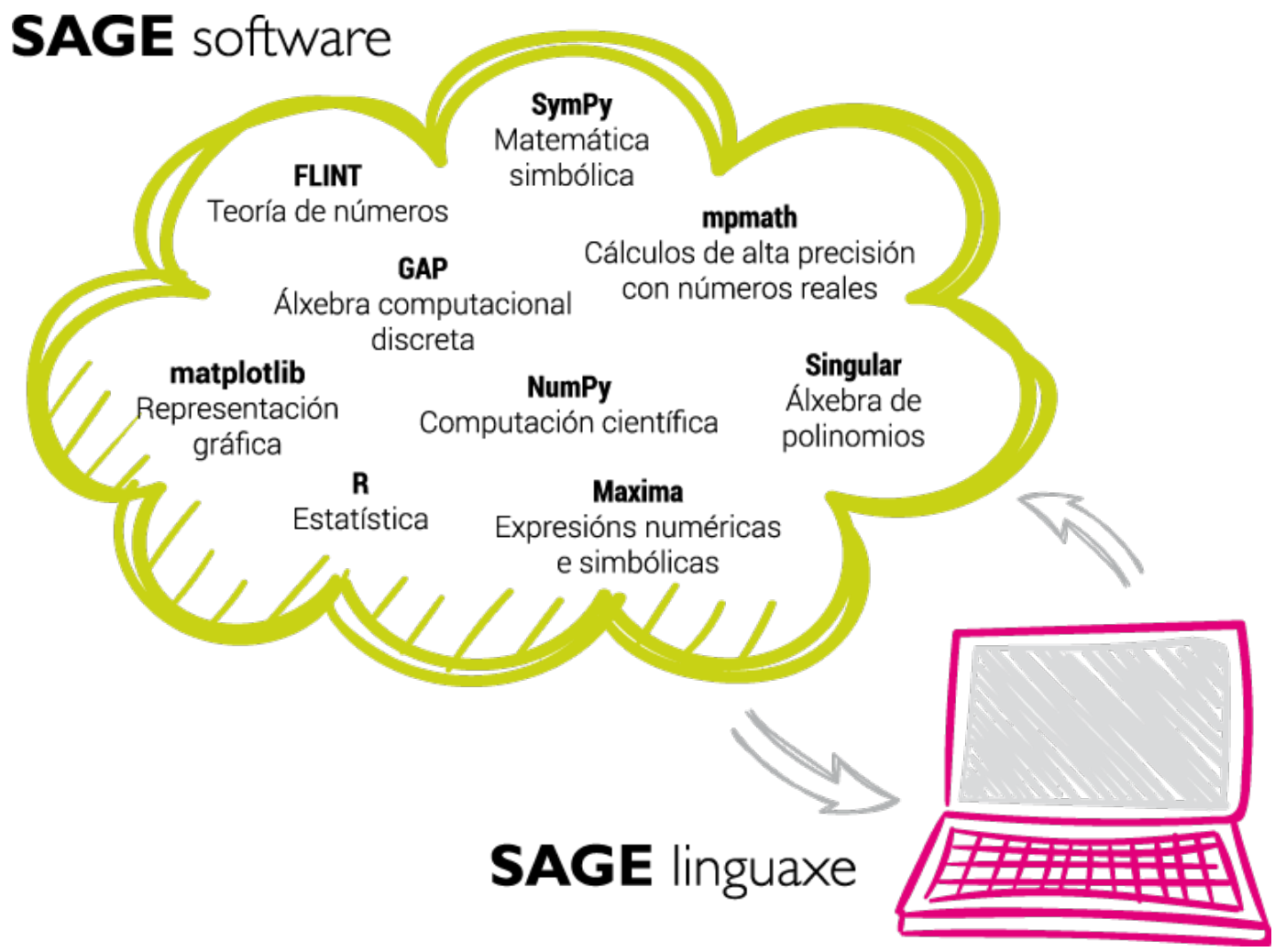
SageMath, software matemático nas clases de Física e Matemáticas

Beatriz Padín Romero

Congreso "O futuro da educación". Santiago de Compostela, 3-4 de xullo de 2017

http://fisicaconsage.weebly.com/ (http://fisicaconsage.weebly.com/)

SageMath é un software matemático libre e de código aberto destinado á educación e á investigación en matemáticas. Combina e integra unha linguaxe de programación e diversos paquetes de software matemático baixo unha contorna común coa que se pode traballar localmente unha vez descargado o software ou ben se pode acceder a ela online a través dun navegador web.



Debido á súa capacidade de cálculo tanto en matemáticas puras como aplicadas, as ferramentas que ofrece poden ser aproveitadas para enriquecer e complementar a ensinanza das materias de Matemáticas e Física. De entre todos os seus compoñentes, os seguintes son de especial interese nos niveis de ensinanza secundaria: operacións aritméticas (con números enteiros, racionais, reais e complexos), teoría elemental de números (números primos, divisores, máximo común divisor, mínimo común múltiplo…), cálculo (límites, derivadas, integrais…), representación de funcións e curvas (en dúas e tres dimensións), álxebra lineal (resolución de ecuacións e sistemas, vectores, matrices, determinantes...) e polinomios (operacións, factorización, raíces, fraccións alxebraicas…).

Neste obradoiro eminentemente práctico presentaremos SageMath de xeito que os asistentes descubran que se pode facer con este software e se familiaricen coa maneira de traballar con el, para que así adquiran unhas nocións básicas sobre o seu uso que lles permitan afondar posteriormente en aqueles aspectos nos que estean máis interesados.

Para empezar a traballar co software o máis doado é utilizar as celdas online de SageMathCell dispoñibles en https://sagecell.sagemath.org/ (https://sagecell.sagemath.org/). Tamén se poden utilizar os recursos computacionais que proporciona a interfaz web colaborativa de https://cocalc.com/ (https://cocalc.com/) ou se pode descargar o software en http://www.sagemath.org/ (http://www.sagemath.org/) para traballar de maneira local.

Cousas que debes saber sobre SageMath para empezar con bo pé¶

http://fisicaconsage.weebly.com/antes-de-empezar.html (http://fisicaconsage.weebly.com/antes-de-empezar.html)

1. Accede a SageMathCell no enlace https://sagecell.sagemath.org/ (https://sagecell.sagemath.org/).
2. Escribe unha expresión na celda e pulsa Maiúsculas+Enter ou o botón Evaluate para avaliala.
3. Escribe cada instrución nunha liña diferente.
4. Os espazos importan (ás veces).
5. Declara todas as variables que vaias utilizar... excepto x.
6. Cidade non é o mesmo que cidade.
7. As funcións necesitan parénteses.
8. Os argumentos dunha función sepáranse con comas.
9. As listas van entre corchetes.
10. Para compartir o teu código, copia o enlace "Permalink" do botón "Share".
11. E cando teñas algunha dúbida consulta http://www.sagemath.org/ (http://www.sagemath.org/).

Representación gráfica de funcións

http://fisicaconsage.weebly.com/representacioacuten-graacutefica-de-funcioacutens.html (http://fisicaconsage.weebly.com/representacioacuten-graacutefica-de-funcioacutens.html)

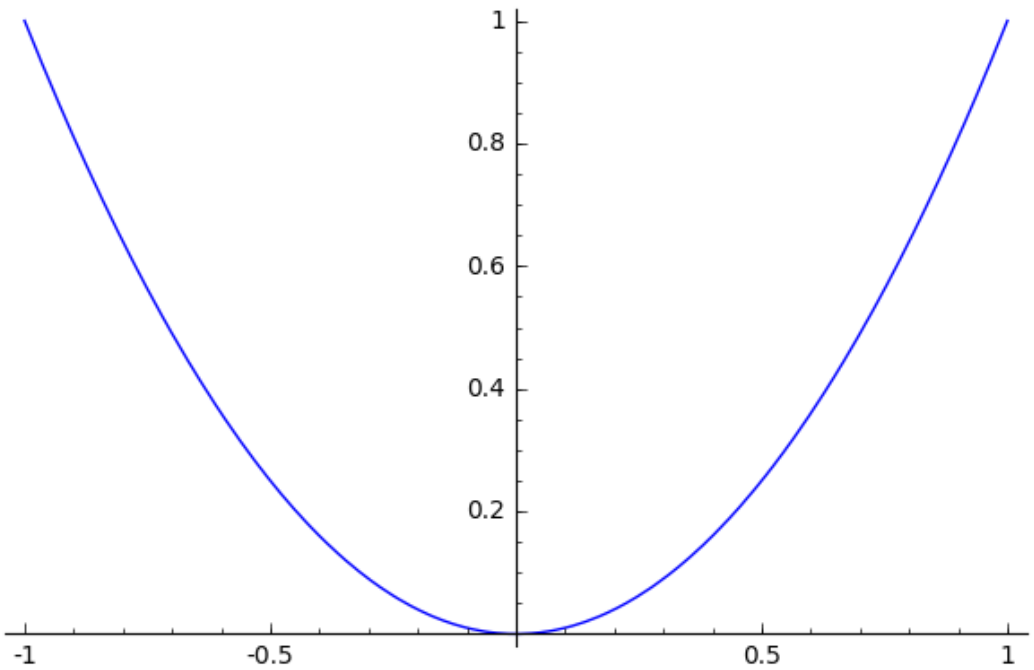
Sage	**Significado**
`alpha`	Transparencia da liña
`aspect_ratio`	Proporción entre a unidade no eixe X e no eixe Y
`axes`	Mostra ou oculta os eixes de coordenadas
`axes_labels`	Lenda dos eixes de coordenadas
`axes_labels_size`	Tamaño da lenda dos eixes de coordenadas
`color`	Cor da liña
`detect_poles`	Detecta ou mostra as asíntotas
`exclude`	Valores de *x* excluidos na representación gráfica
`figsize`	Tamaño da gráfica
`fill`	Recheo da gráfica
`fillalpha`	Transparencia do recheo
`fillcolor`	Cor do recheo
`frame`	Mostra ou oculta un marco arredor da gráfica
`gridlines`	Liñas de cuadrícula
`implicit_plot`	Crea a gráfica dunha función implícita
`implicit_plot3d`	Crea a gráfica dunha función implícita en 3D
`legend_label`	Lenda da gráfica
`linestyle`	Tipo de liña
`opacity`	Transparencia da superficie
`parametric_plot`	Crea a gráfica dunha función paramétrica
`parametric_plot3d`	Crea a gráfica dunha función paramétrica en 3D
`plot`	Crea a gráfica dunha función definida de forma explícita en coordenadas cartesianas
`plot3d`	Representa unha superficie no espacio tridimensional
`plot_points`	Número de valores utilizados para crear a gráfica da función
`polar_plot`	Crea a gráfica dunha función definida en coordenadas polares
`scale`	Tipo de escala utilizada nos eixes de coordenadas
`show`	Mostra a gráfica por pantalla
`thickness`	Grosor da liña
`tick_formatter`	Tipo de formateo utilizado na numeración dos eixes de coordenadas
`ticks`	Marcas utilizadas nos eixes de coordenadas
`title`	Título da gráfica
`xmax`	Valor máximo da coordenada *x*
`xmin`	Valor mínimo da coordenada *x*
`ymax`	Valor máximo da coordenada *y*
`ymin`	Valor mínimo da coordenada *y*

Exercicio 1

Representa a función $f(x) = x^2$.

In [1]:
```
plot(x^2)
```

Out[1]:

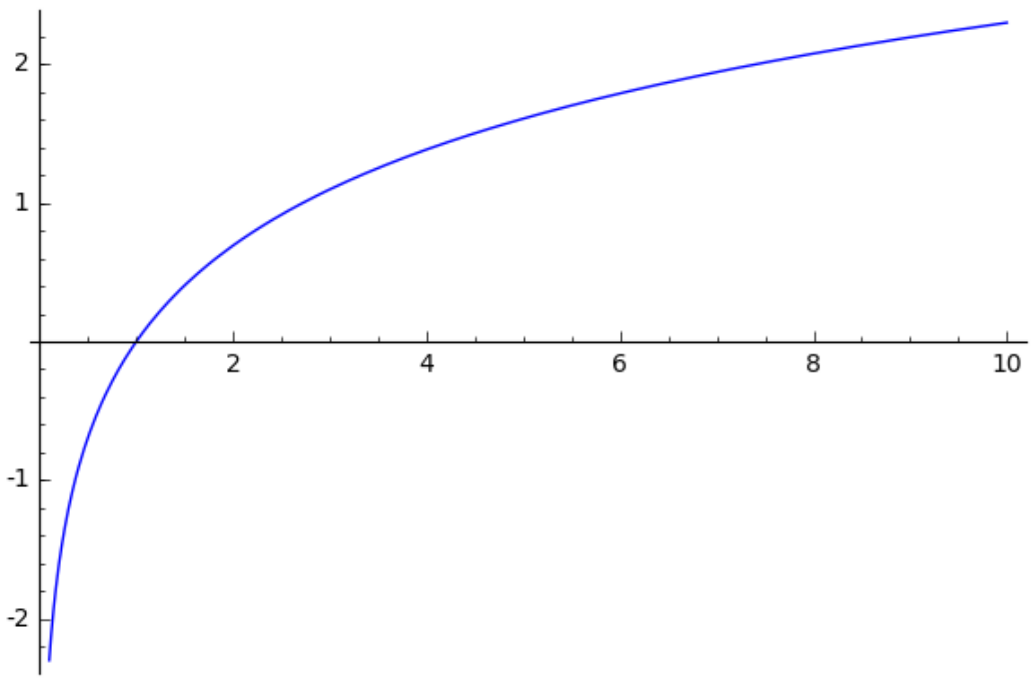


Exercicio 2

Representa a función $f(x) = \ln x$. Axusta o rango dos valores da abscisa para que a gráfica quede ben representada.

In [2]:
```
plot(log(x), xmin=0.1, xmax=10)
```

Out[2]:



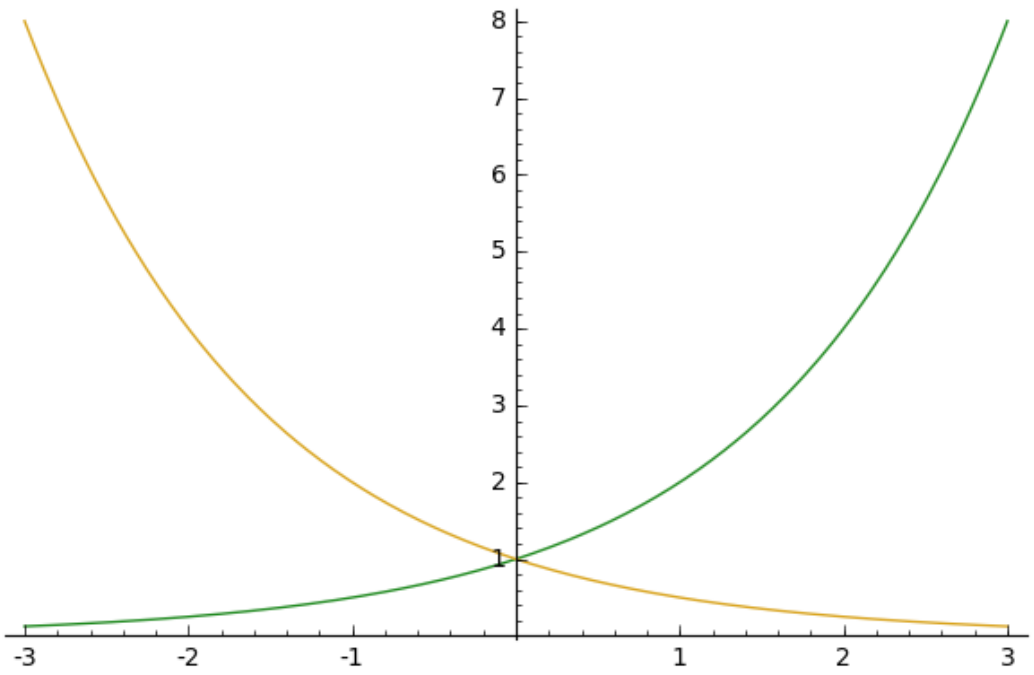
Exercicio 3

Representa, nos mesmos eixes de coordenadas e con distinta cor, as gráficas das seguintes funcións exponenciais:

$$f(x) = 2^x$$
$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

In [3]:
```
plot(2^x, (x, -3,3), color='forestgreen') + plot((1/2)^x, (x, -3,3), color='goldenrod')
```

Out[3]:



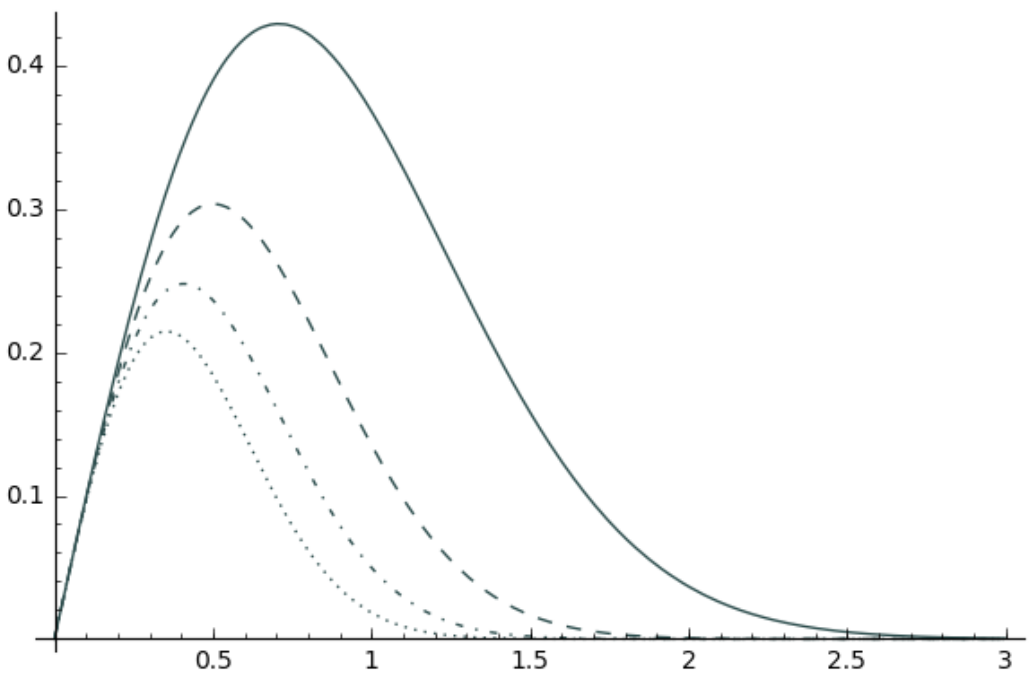
Exercicio 4

Representa as gráficas da función $f(x) = x \cdot e^{-n \cdot x^2}$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

In [4]:
```
grafica1 = plot(x*exp(-1*x^2), (x, 0, 3), color='darkslategray', linestyle='-')
grafica2 = plot(x*exp(-2*x^2), (x, 0, 3), color='darkslategray', linestyle='--')
grafica3 = plot(x*exp(-3*x^2), (x, 0, 3), color='darkslategray', linestyle='-.')
grafica4 = plot(x*exp(-4*x^2), (x, 0, 3), color='darkslategray', linestyle=':')

grafica1 + grafica2 + grafica3 + grafica4
```

Out[4]:

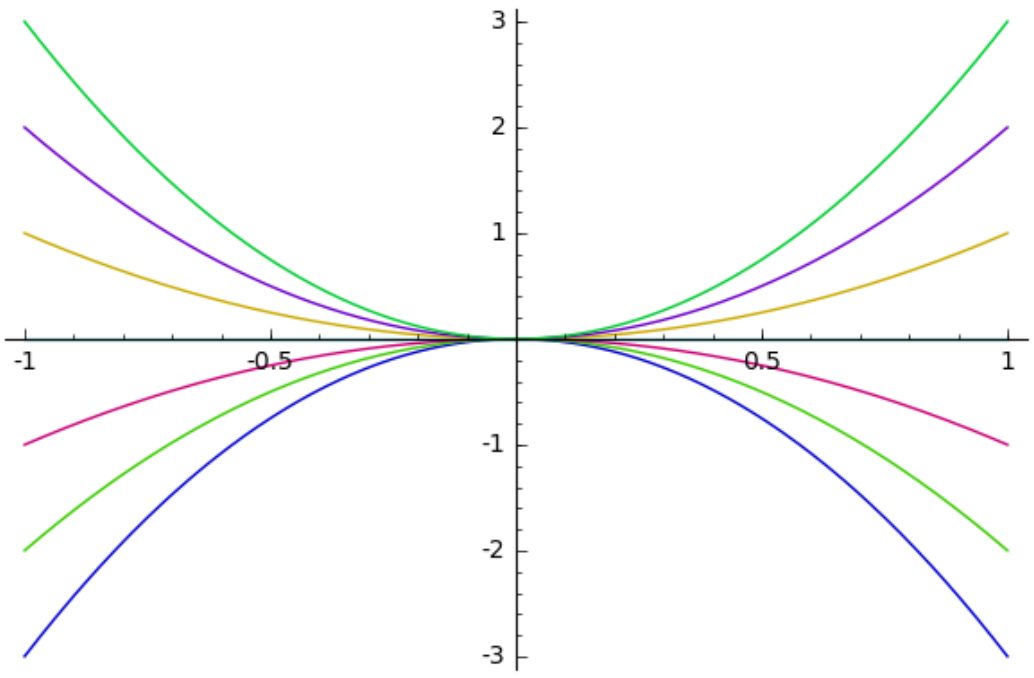


Exercicio 5

Representa como varía a gráfica da parábola $y = ax^2$ co valor do parámetro a.

In [5]:
```
plot([a*x^2 for a in [-3..3]])
```

Out[5]:



Exercicio 6

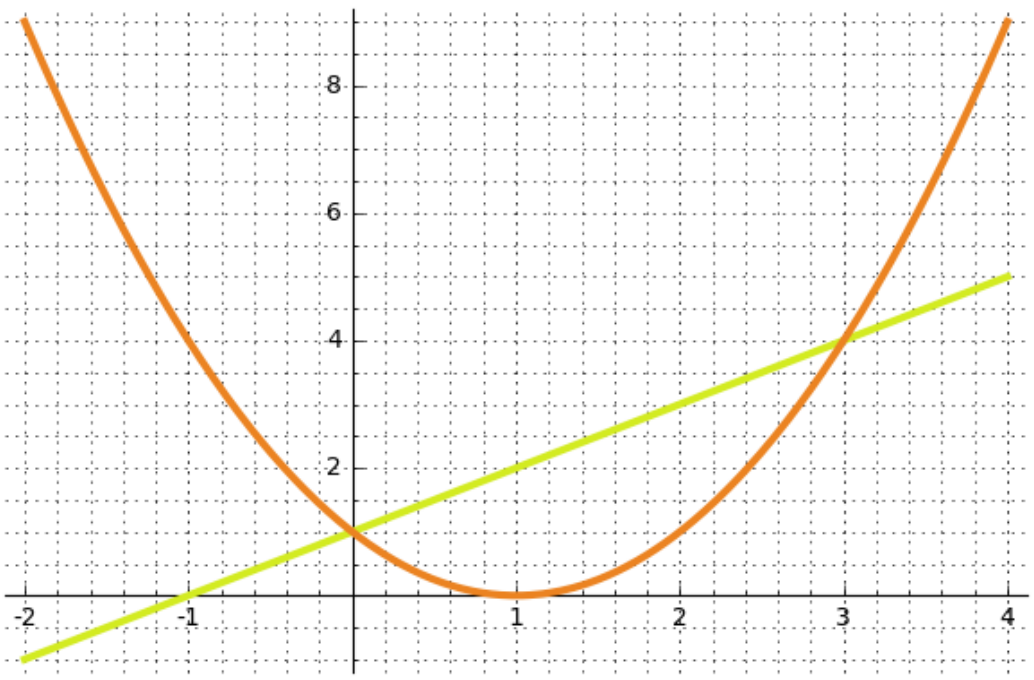
Representa graficamente o sistema:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 2x + 1 \\ y &= x + 1 \end{aligned}\right\}$$

In [6]:
```
parabola = plot(x^2 - 2*x + 1, (x, -2, 4), thickness=3, color='#EB8321', zorder=4)
recta = plot(x + 1, (x, -2, 4), thickness=3, color='#D3EB21', zorder=3)

show(parabola + recta, gridlines='minor')
```

Out[6]:



Exercicio 7

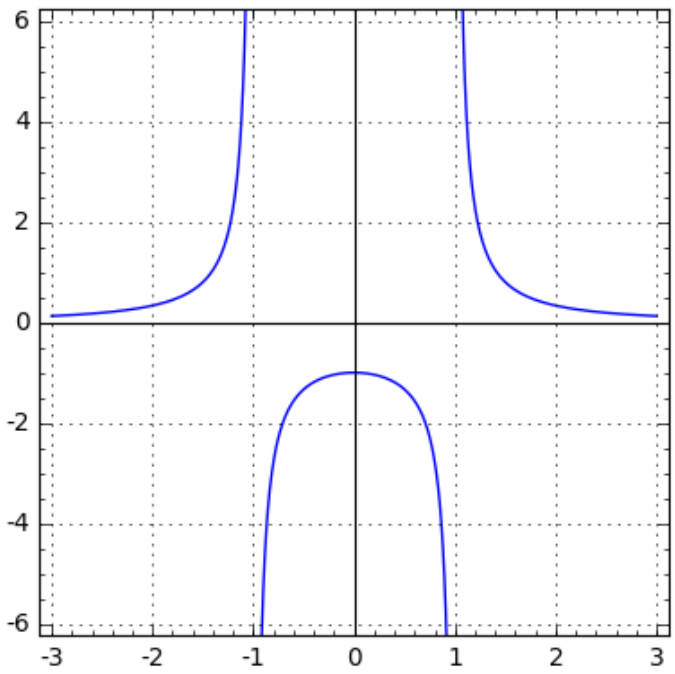
Representa a gráfica da función racional:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

In [7]:
```
P(x) = 1
Q(x) = x^2-1

f = plot(P(x)/Q(x), (x, -3, 3), exclude=(Q(x)==0), ymin=-6, ymax=6)
show(f, frame=true, figsize=[4,4], gridlines=true)
```

Out[7]:



Exercicio 8

Representa, en diferentes eixes de coordenadas, as seguintes funcións:

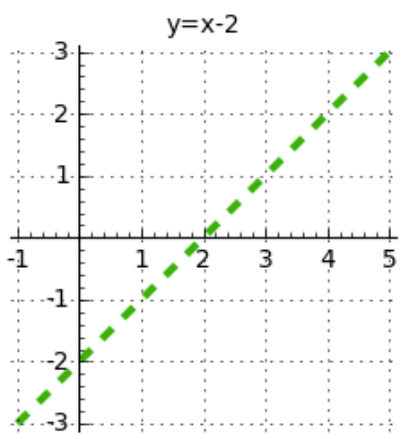
$$f(x) = x - 2$$
$$g(x) = -x + 2$$
$$h(x) = |x - 2|$$

In [8]:

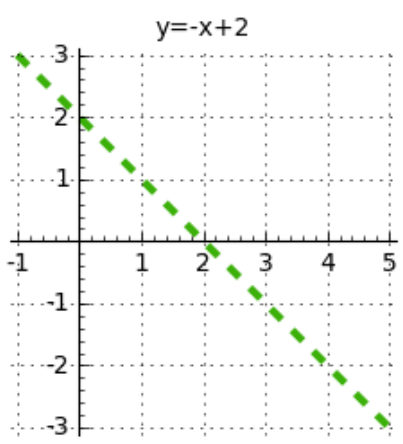
```
f = plot(x - 2, (x, -1, 5), color='#3AB009', thickness=3, linestyle='--')
g = plot(-x + 2, (x, -1, 5), color='#3AB009', thickness=3, linestyle='--')
h = plot(abs(x-2), (x, -1, 5), color='#8E44AD', thickness=3)

show(f, ymin=-3, ymax=3, aspect_ratio=1, figsize=4, gridlines='true', title='y=x-2')
show(g, ymin=-3, ymax=3, aspect_ratio=1, figsize=4, gridlines='true', title='y=-x+2')
show(f+g+h, ymin=-3, ymax=3, aspect_ratio=1, figsize=4, gridlines='true', title='y=|x-2|')
```

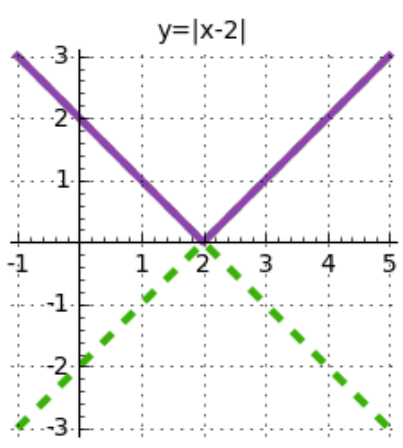
Out[8]:



Out[8]:



Out[8]:

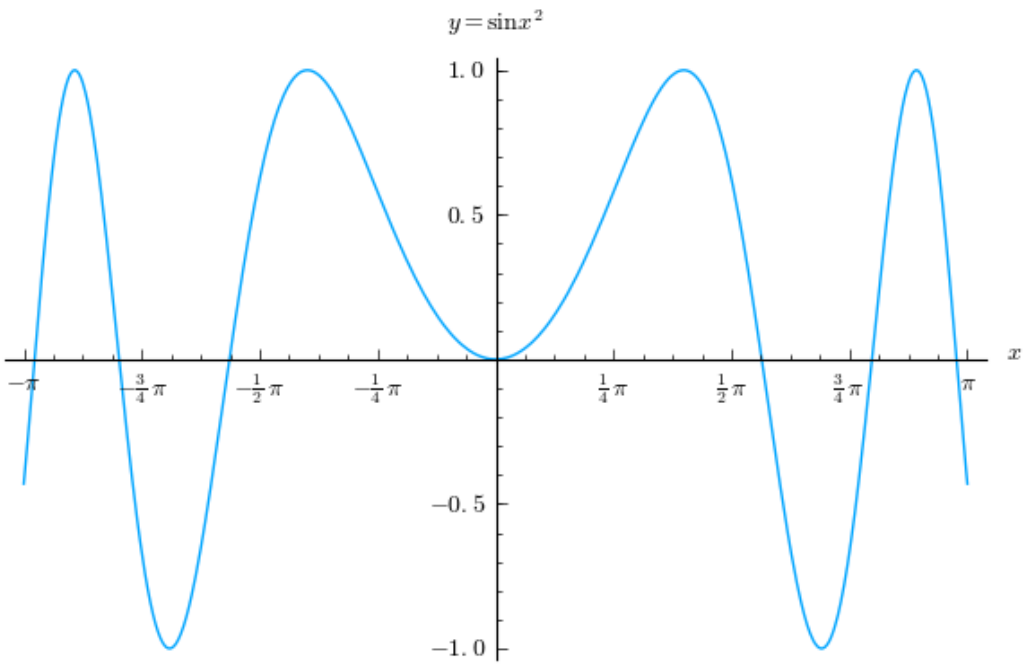


Exercicio 9

Representa a función $f(x) = \sin x^2$ entre $-\pi$ e π cos eixes adecuadamente formateados.

In [9]:
```
grafica = plot(sin(x^2), (x, -pi, pi), color=(0, 0.65, 1))
show(grafica, tick_formatter=pi, ticks=pi/4, axes_labels=['$x$','$y=\sin x^{2}$'], axes_labels_siz
e=1)
```

Out[9]:



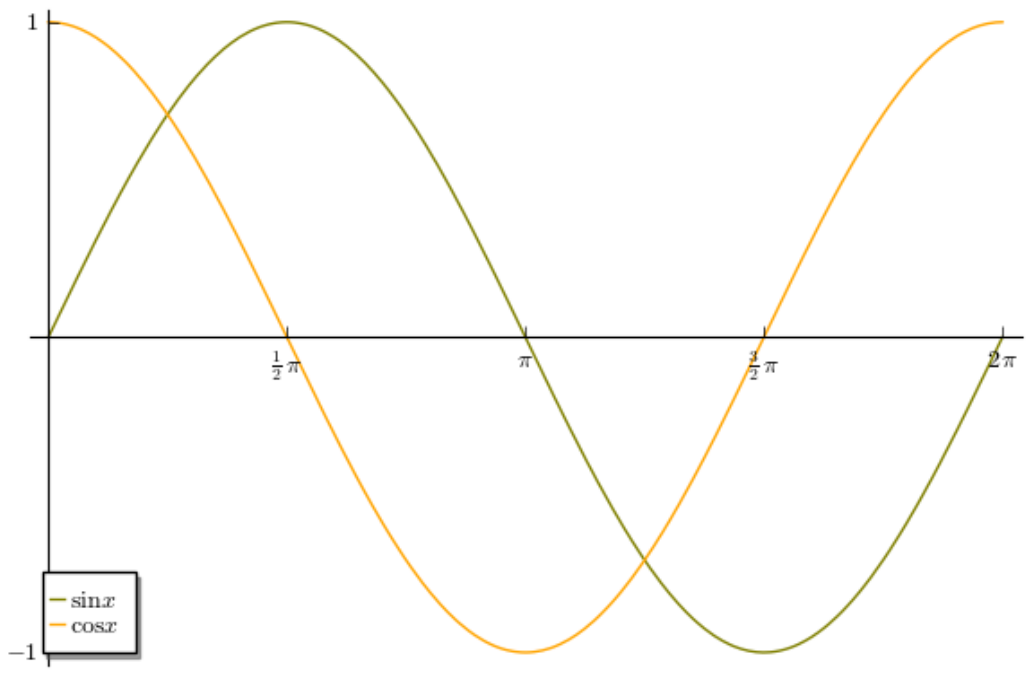
Exercicio 10

Representa, nos mesmos eixes de coordenadas, as funcións $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ entre 0 e 2π.

In [10]:
```
f = plot(sin(x), (x, 0, 2*pi), color='olive', legend_label='$\sin x$')
g = plot(cos(x), (x, 0, 2*pi), color='orange', legend_label='$\cos x$')

show(f + g, tick_formatter=pi, ticks=[[pi/2, pi, 3*pi/2, 2*pi], [-1, 0, 1]])
```

Out[10]:



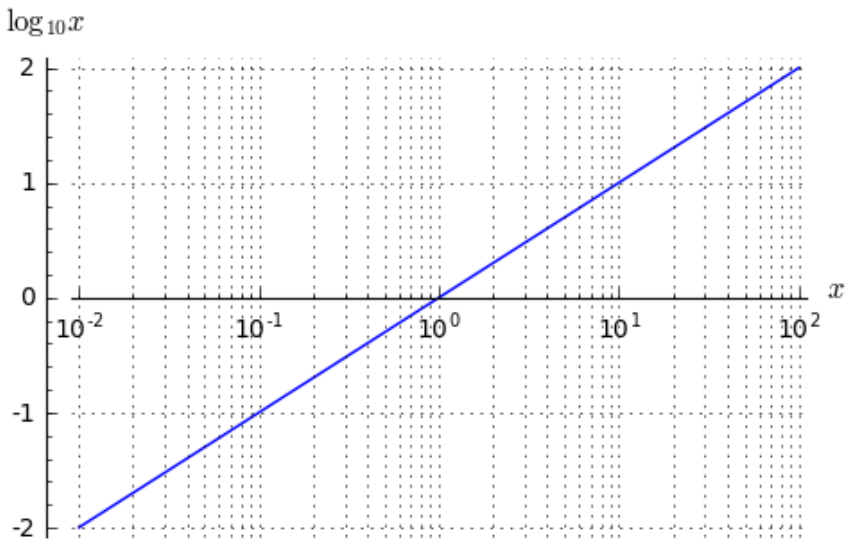
Exercicio 11

Representa as funcións $\log_{10} x$ e 10^x utilizando as escalas logarítmicas apropiadas.

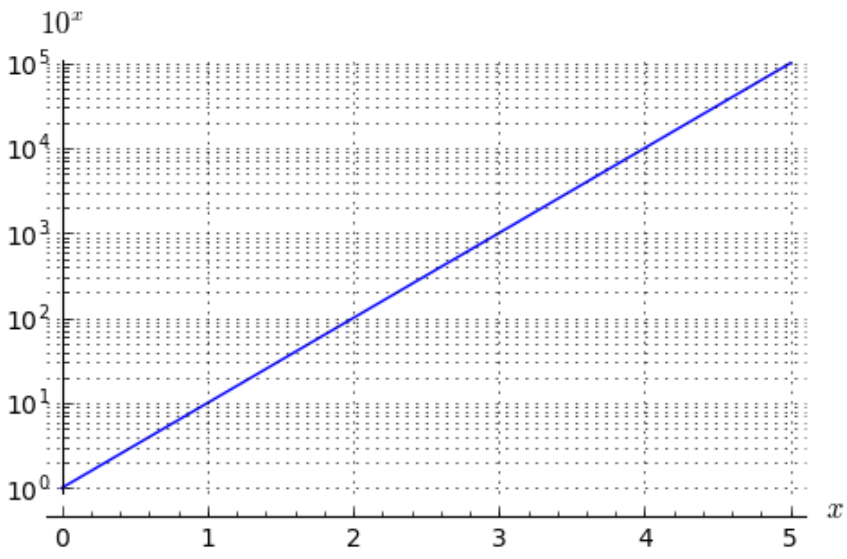
In [11]:
```
escalalog_x = plot(log(x, 10), (x, 0.01, 100), scale='semilogx')
escalalog_y = plot(10^x, (x, 0, 5), scale='semilogy')

show(escalalog_x, gridlines=['minor','major'], axes_labels=['$x$','$\log _{10}x$'], axes_labels_si
ze=1.2, figsize=5)
show(escalalog_y, gridlines=['major','minor'], axes_labels=['$x$','$10^x$'], axes_labels_size=1.2,
 figsize=5)
```

Out[11]:



Out[11]:

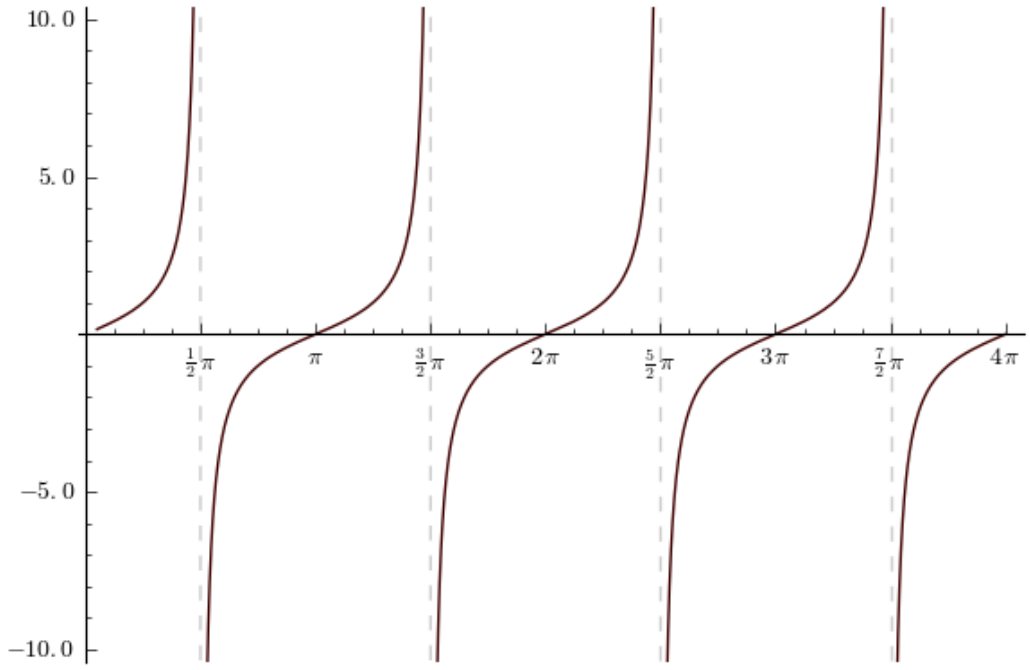


Exercicio 12

Representa a función $f(x) = \tan x$ coas súas asíntotas.

In [12]:
```
grafica = plot(tan(x), (x, 0, 4*pi), detect_poles='show', color='#400000')
show(grafica, ymin=-10, ymax=10, tick_formatter=pi, ticks=pi/2)
```

Out[12]:

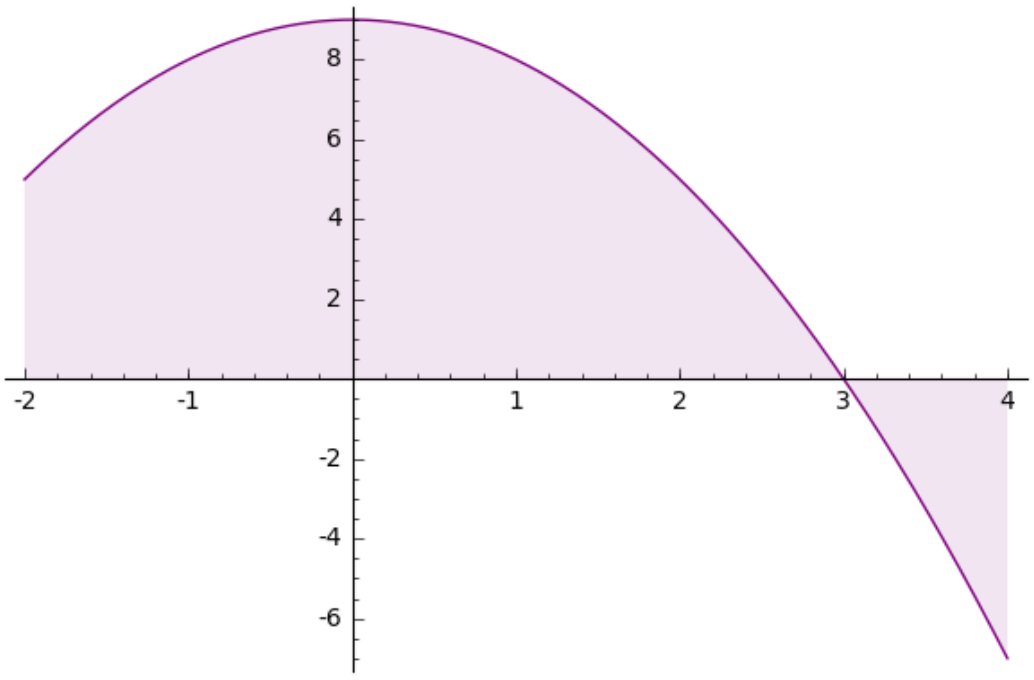


Exercicio 13

Representa a área do recinto limitado pola curva $y = 9 - x^2$, as rectas $x = -2$ e $x = 4$, e o eixe OX.

In [13]:
```
f = 9 - x^2
area = plot(f, (x, -2, 4), color='purple', fill='axis', fillcolor='purple', fillalpha=0.1)
show(area)
```

Out[13]:



Exercicio 14

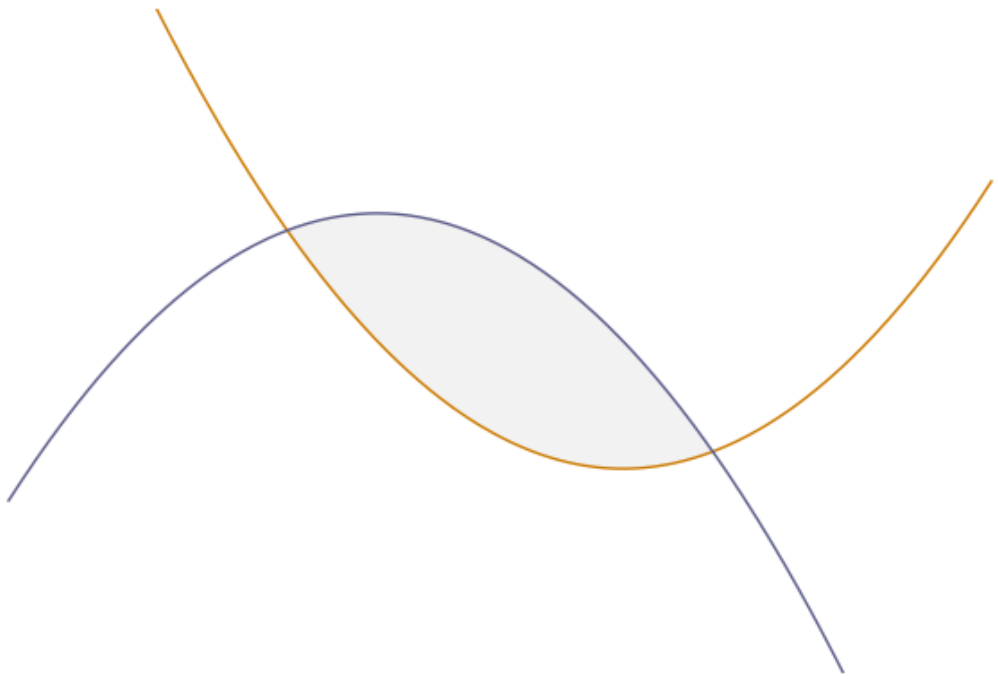
Representa a área encerrada entre as gráficas de $f(x) = (x+1)(x-3)$ e $g(x) = -(x-1)(x+3)$. Ten en conta que estas funcións se cortan nos puntos $x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{3}$.

In [14]:
```
f = (x+1)*(x-3)
g = -(x-1)*(x+3)

curva_f = plot(f, (x, -4, 4), color='#cc7a00')
curva_g = plot(g, (x, -4, 4), color='#5c5c8a')
area = plot(f, (x, -sqrt(3), sqrt(3)), fill=g, fillcolor='#808080', fillalpha=0.1, linestyle='')

show(curva_f + curva_g + area, ymin= -10, ymax=10, axes=false)
```

Out[14]:

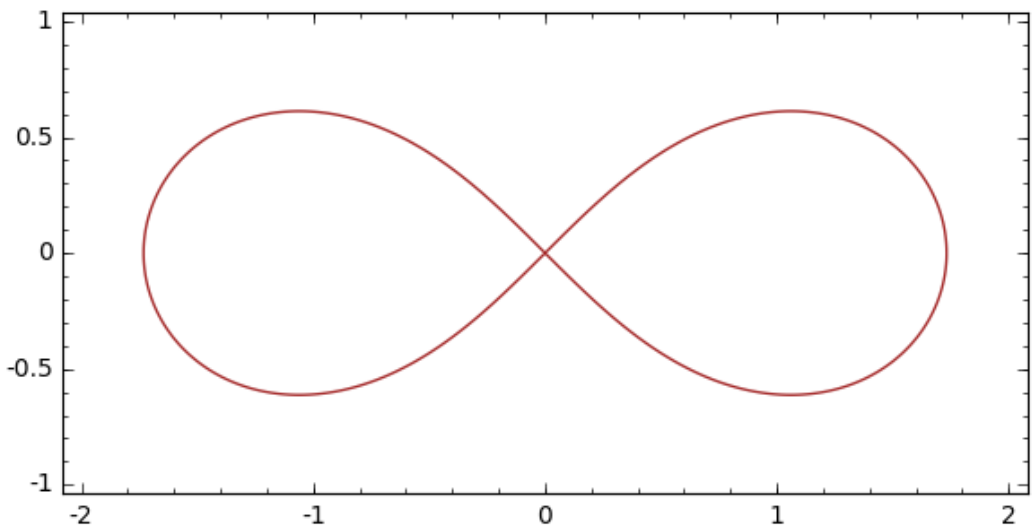


Exercicio 15

A ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 3(x^2 - y^2)$ representa unha lemniscata de Bernouilli. Debúxaa.

In [15]:
```
var('x y')
implicit_plot((x^2 + y^2)^2 == 3*(x^2 - y^2), (x, -2, 2), (y, -1, 1), plot_points=1000, color='bro
wn')
```

Out[15]:



Exercicio 16

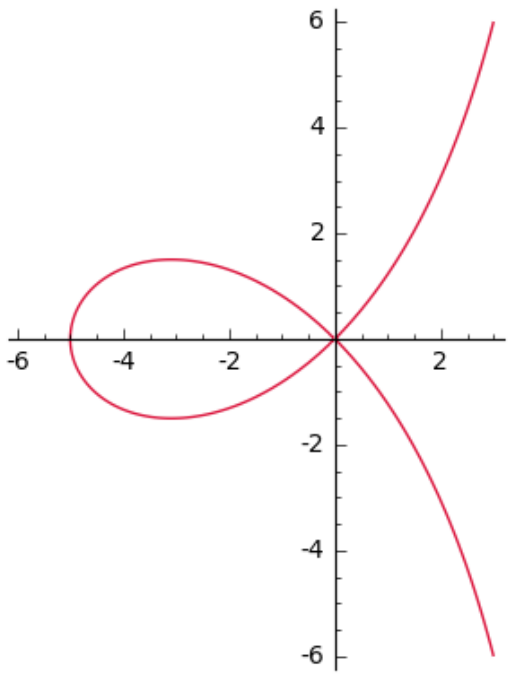
A estrofoide recta ten por ecuación:

$$x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$$

Representa a curva correspondente a $a = 5$.

In [16]:
```
var('x y')
f(x,y) = x*(x^2+y^2)+5*(x^2-y^2)
curva = implicit_plot(f(x,y), (x,-6,3), (y,-6,6), color='crimson')
show(curva, frame=false, axes=true)
```

Out[16]:



Exercicio 17

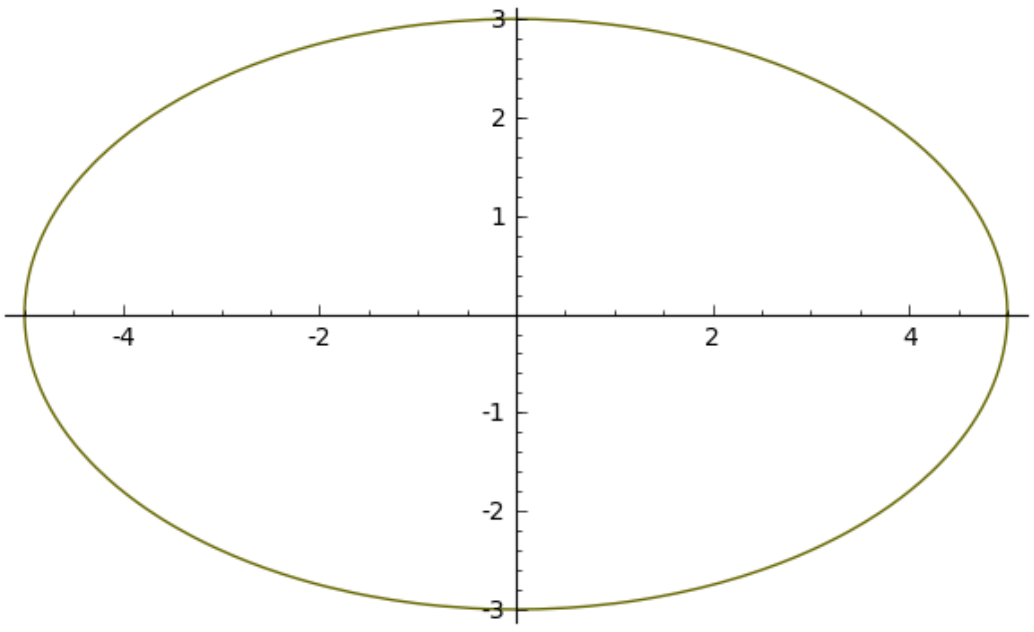
As ecuacións paramétricas dunha elipse de de semiexe maior $a = 5$ e semiexe menor $b = 3$ con centro na orixe de coordenadas son:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 5\cos t \\ y(t) &= 3\sin t \end{aligned}\right\}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Represéntaa.

In [17]:
```
var('t')
parametric_plot((5*cos(t), 3*sin(t)), (t,0,2*pi), aspect_ratio=1, color='#666600')
```

Out[17]:



Exercicio 18

As ecuacións parámetricas dunha cardioide son:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= 2a(1+\cos t)\sin t \end{aligned}\right\}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Representa as cardioides correspondentes a $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $a = 2$ e $a = 4$.

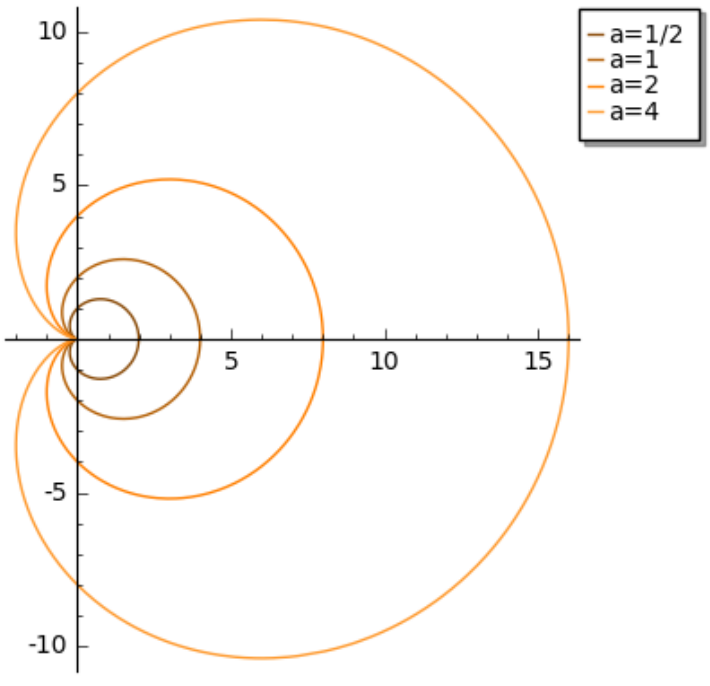
In [18]:
```
var('t')

x(a,t) = 2*a*(1+cos(t))*cos(t)
y(a,t) = 2*a*(1+cos(t))*sin(t)

cardioides = parametric_plot((x(0.5,t), y(0.5,t)), (t,0,2*pi), color='#8A4B08', legend_label='a=1/
2')
cardioides += parametric_plot((x(1,t), y(1,t)), (t,0,2*pi), color='#B45F04', legend_label='a=1')
cardioides += parametric_plot((x(2,t), y(2,t)), (t,0,2*pi), color='#FF8000', legend_label='a=2')
cardioides += parametric_plot((x(4,t), y(4,t)), (t,0,2*pi), color='#FE9A2E', legend_label='a=4')

cardioides.set_legend_options(loc=(1,0.8))
show(cardioides, aspect_ratio=1)
```

Out[18]:



Exercicio 19

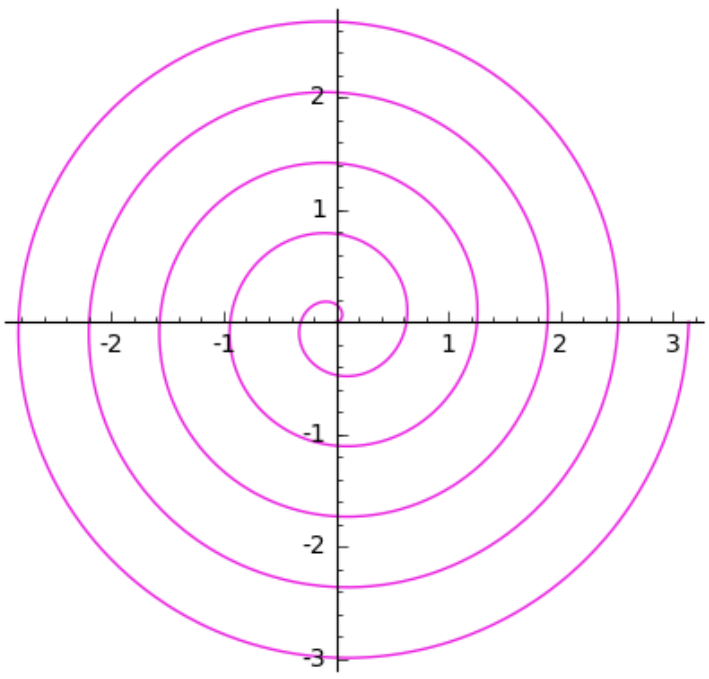
A espiral de Arquímedes pódese expresar, en coordenadas polares, como $\rho(\theta) = a\theta$. Representa a espiral

$$\rho = \frac{\theta}{10}$$

para $0 \leq \theta \leq 10\pi$.

In [19]:
```
var('zeta')
polar_plot(zeta/10, (zeta, 0, 10*pi), plot_points=2000, color='#EB21E2')
```

Out[19]:



Exercicio 20

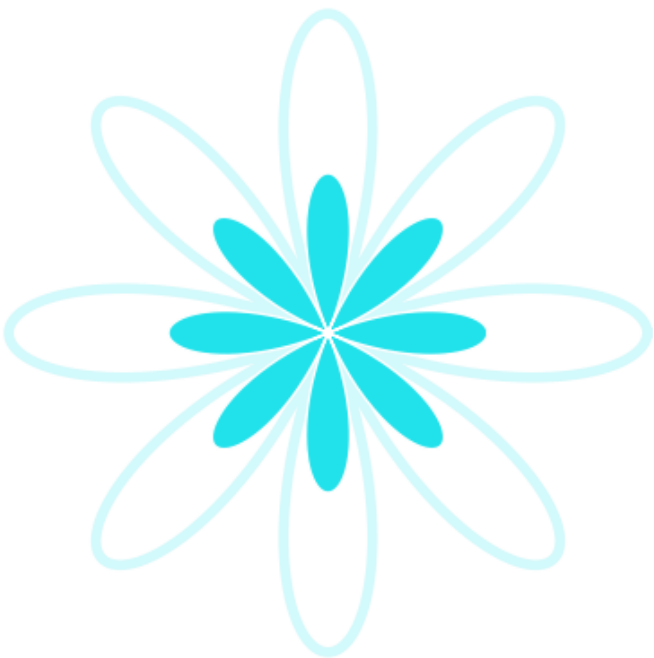
Representa as rosáceas definidas, respectivamente, polas ecuacións $\rho = 2\cos(4\theta)$ e $\rho = 4\cos(4\theta)$.

In [20]:
```
var('zeta')

flor = polar_plot(4*cos(4*zeta), (zeta, 0, 2*pi), color='#21E2EB', alpha=0.2, thickness=4)
flor += polar_plot(2*cos(4*zeta), (zeta, 0, 2*pi), color=(1,1,1), fill=true, fillcolor='#21E2EB',
fillalpha=1)

show(flor, axes=false)
```

Out[20]:

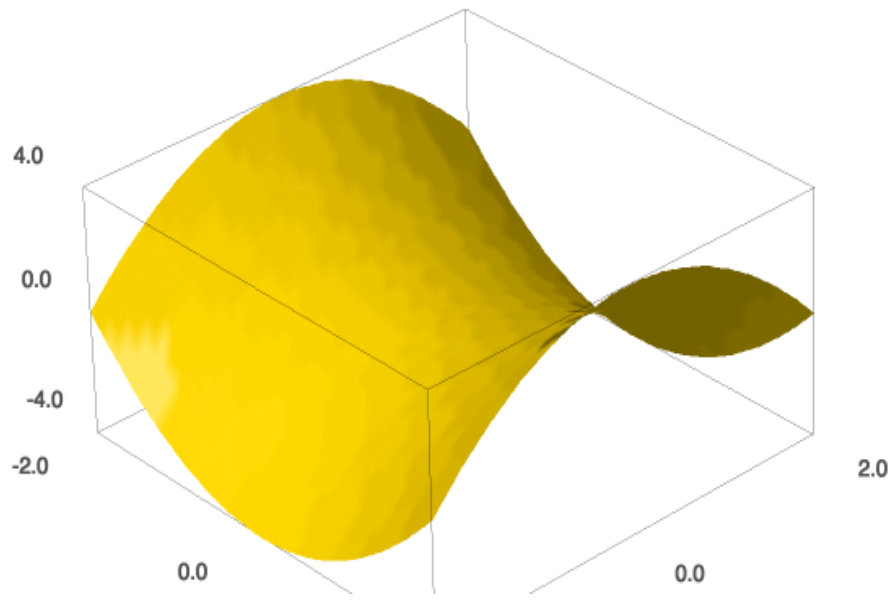


Exercicio 21

As gráficas das funcións de dúas variables, $z = f(x, y)$, son superfices no espacio tridimensional. Representa o paraboloide hiperbólico definido pola función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

In [21]:
```
var('x y')
f = x^2 - y^2
plot3d(f, (x,-2,2), (y,-2,2), color='gold')
```

Out[21]:



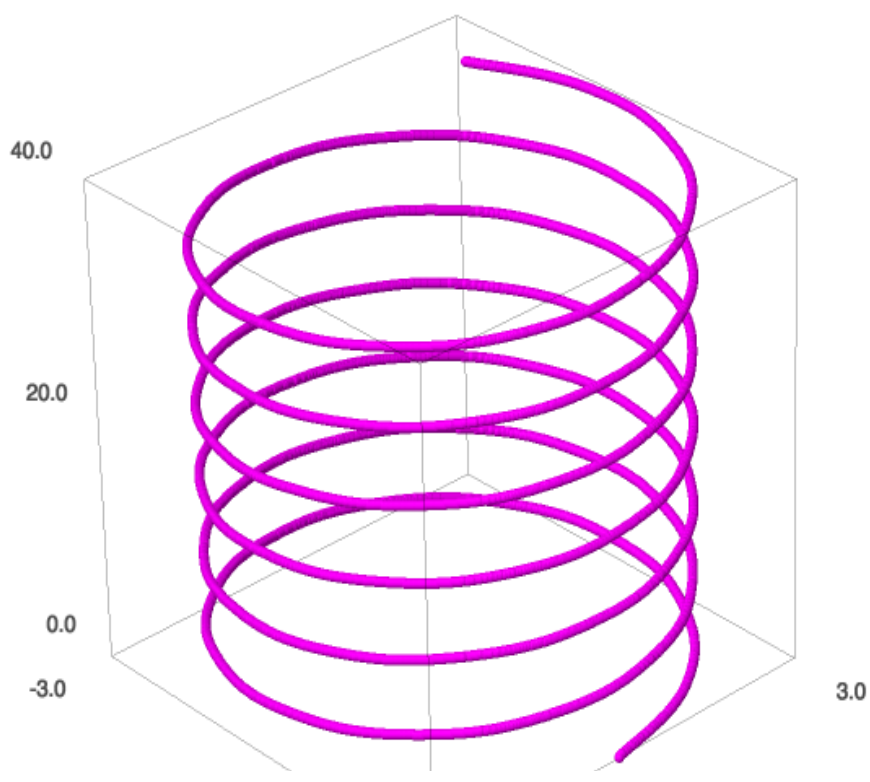
Exercicio 22

Representa a traxectoria helicoidal definida polas seguintes ecuacións paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 3\cos t \\ y(t) &= 3\sin t \\ z(t) &= t \end{aligned}\right\}$$

In [22]:
```
var('t')
parametric_plot3d((3*cos(t), 3*sin(t), t), (t,0,40), thickness=12, color='magenta')
```

Out[22]:



Exercicio 23

Representa os planos coordenados no espacio.

In [23]:

```
var('t s')

planoXY = parametric_plot3d((t,s,0), (t, -3,3), (s,-3,3), color='yellow', opacity=.8)
planoXZ = parametric_plot3d((t,0,s), (t, -3,3), (s,-3,3), color='orange', opacity=.8)
planoYZ = parametric_plot3d((0,t,s), (t, -3,3), (s,-3,3), color='red', opacity=.8)

show(planoXY + planoXZ + planoYZ, frame=false)
```

Out[23]:

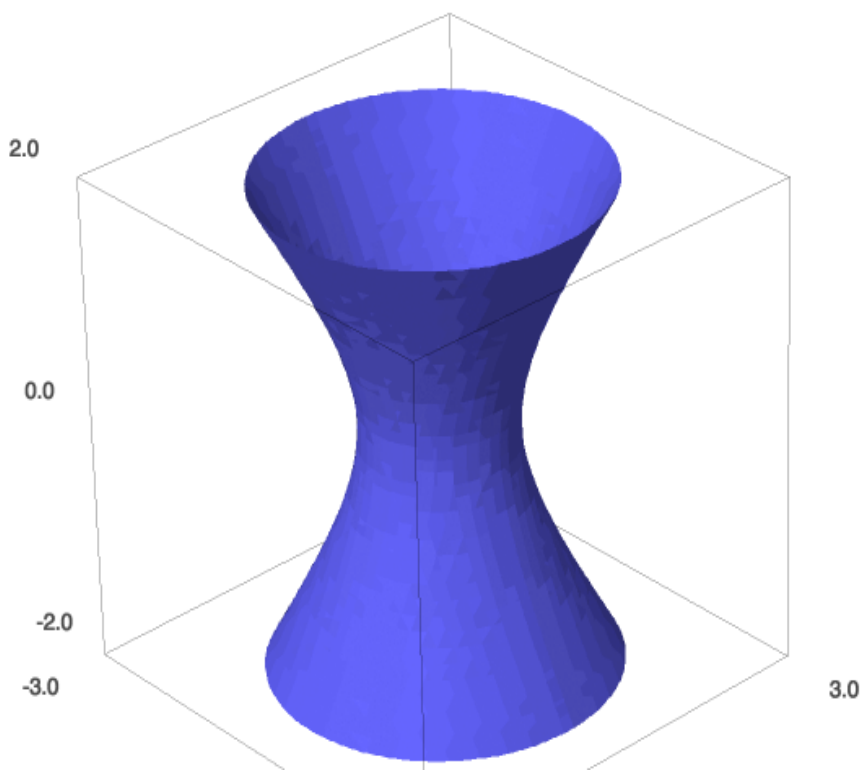
Exercicio 24

Representa o hiperboloide dunha folla definido pola ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

In [24]:

```
var('x y z')
implicit_plot3d(x^2 + y^2 - z^2 == 1, (x,-3,3), (y,-3,3), (z,-2,2))
```

Out[24]:



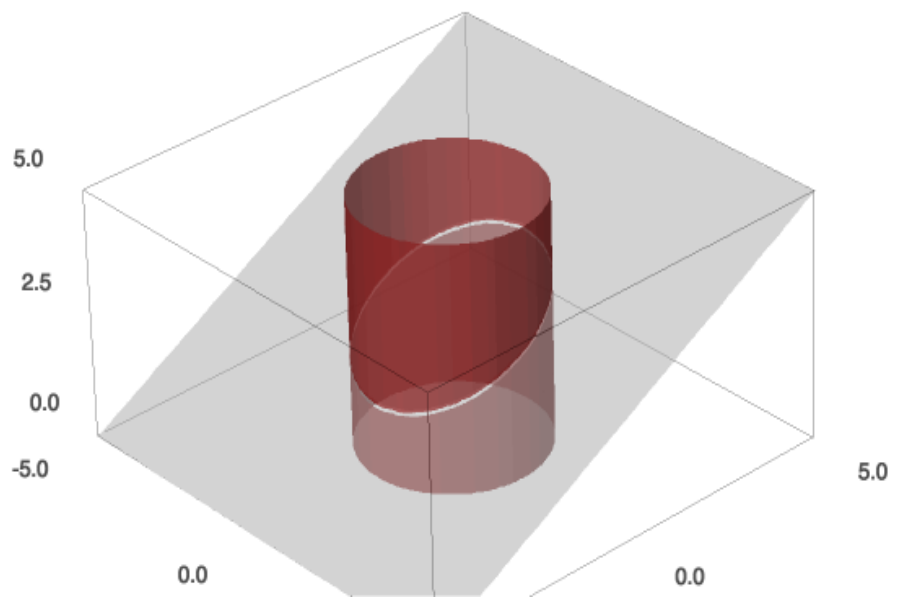
Exercicio 25

Representa a intersección do plano $y - 2z + 5 = 0$ co cilindro $x^2 + y^2 = 4$ de altura 5.

In [25]:

```
var('x y z')

cilindro = implicit_plot3d(x^2 + y^2 == 4, (x,-3,3), (y,-3,3), (z,0,5), color='brown', opacity=.7)
plano = implicit_plot3d(y - 2*z + 5 == 0, (x,-5,5), (y,-5,5), (z,0,5), color='darkgray', opacity=.
4)

show(cilindro + plano, aspect_ratio=[1,1,1])
```

Out[25]: